Varianta 6

Subiectul I.

a) $AB=\sqrt{26}$.
b) Raza cercului este 4.
c) $x-2y+5=0$.
d) $\left|\dfrac{5-2i}{2-5i}\right|=1$
e) $S_{MNP}=\dfrac{5}{2}$.
f) $a=-1$, $b=0$.

Subiectul II.

1.
a) 92.
b) Probabilitatea căutată este $p=\dfrac{2}{5}$.
c) În grupul $(\mathbf{Z}_{11},+)$, avem $\hat{0}+\hat{1}+...+\widehat{10}=\widehat{55}=\hat{0}$.
d) $E=0$.
e) $x=1$.

2.
a) $f'(x)=2006x^{2005}$.
b) $\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{2008}{2007}$.
c) $f''(x)=2006\cdot 2005\cdot x^{2004}\geq 0$, $\forall x\in\mathbf{R}$, deci f este convexă pe $\mathbf{R}$.
d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$.
e) Ecuația tangentei este $d:2006x-y-2004=0$.

Subiectul III.

a) $\det(J)=0$ şi $\det(I_2)=1$.
b) $J^2=O_2$.
c) Se arată prin calcul direct.
d) Matricea $M=J$ are rangul egal cu 1, iar $rang(M^2)=rang(O_2)=0$
e) Dacă matricea $B\in M_2(\mathbf{C})$ este inversabilă, atunci $\det(B)\neq 0$.
Pentru $n\in\mathbf{N}^*$, obținem $\det(B^n)=(\det(B))^n\neq 0$, deci matricea B^n este inversabilă.

f) Considerăm matricea $C=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{C})$ neinversabilă, deci cu $\det(C)=0$.

Notăm $p+s=t\in\mathbf{C}$. Din **c)** obținem $C^2=t\cdot C$ şi folosind această egalitate se demonstrează prin inducție că $\forall\, n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$, $C^n=t^{n-1}\cdot C$.

g) Considerăm $D\in M_2(\mathbf{C})$ astfel încât $rang(D)=rang(D^2)$.

Dacă $\underline{D=O_2}$, atunci $D^n=O_2$, şi $rang(D)=rang(D^n)=0$, pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$.

Dacă $\underline{rang(D)=1}$, atunci $\det(D)=0$.

Notăm cu t suma elementelor de pe diagonala principală a matricei D.

Folosind **c)** rezultă că $t\neq 0$ şi din **f)** deducem că $D^n=t^{n-1}\cdot D$, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$ şi apoi că $rang(D)=rang(t^{n-1}\cdot D)=rang(D^n)$, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$.

Dacă $\underline{rang(D)=2}$, atunci $\det(D^n)\neq 0$, deci $rang(D^n)=2$, pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$.

Subiectul IV.

a) Calcul direct.

b) $f''(x)<0$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$, deci funcția f' este strict descrescătoare pe $\mathbf{R}$.

c) Pentru orice $k\in[0,\infty)$, funcția f este o funcție Rolle pe intervalul $[k,k+1]$, deci conform teoremei lui Lagrange, există $c\in(k,k+1)$, astfel încât

$$\frac{f(k+1)-f(k)}{k+1-k}=f'(c)\iff f(k+1)-f(k)=\frac{1}{e^c+1}.$$

d) $k<c<k+1 \overset{f'\ s.d.}{\iff} f'(k)>f'(c)>f'(k+1) \overset{\text{a), e)}}{\iff} \dfrac{1}{e^{k+1}+1}<f(k+1)-f(k)<\dfrac{1}{e^k+1}$,

pentru orice $k\in[0,\infty)$.

e) Pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$, $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{e^{n+1}+1}>0$, deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

f) Din **d)**, avem $f(k+1)-f(k)<\dfrac{1}{e^k+1}$, $k\in[0,\infty)$.

Pentru $n\in\mathbf{N}^*$, înlocuind succesiv în inegalitatea precedentă k cu fiecare din numerele $1, 2, ..., n$ şi adunând relațiile, obținem $f(n+1)-f(1)<a_n$ (1)

Din **d)**, avem $\dfrac{1}{e^{k+1}+1}<f(k+1)-f(k)$.

Înlocuind succesiv în inegalitatea precedentă k cu fiecare din numerele $0, 1, 2, ..., n-1$ şi adunând relațiile, obținem $a_n<f(n)-f(0)$ (2)

Din (1) şi (2) rezultă concluzia.

g) Din **a)** deducem că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

Avem: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, de unde rezultă că $f(x)<0$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$.

Din **f)** deducem că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior şi fiind şi strict crescător, este convergent.
Trecând la limită în dubla inegalitate din **f)** obținem $-f(1)\leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq -f(0)$,
de unde deducem concluzia.